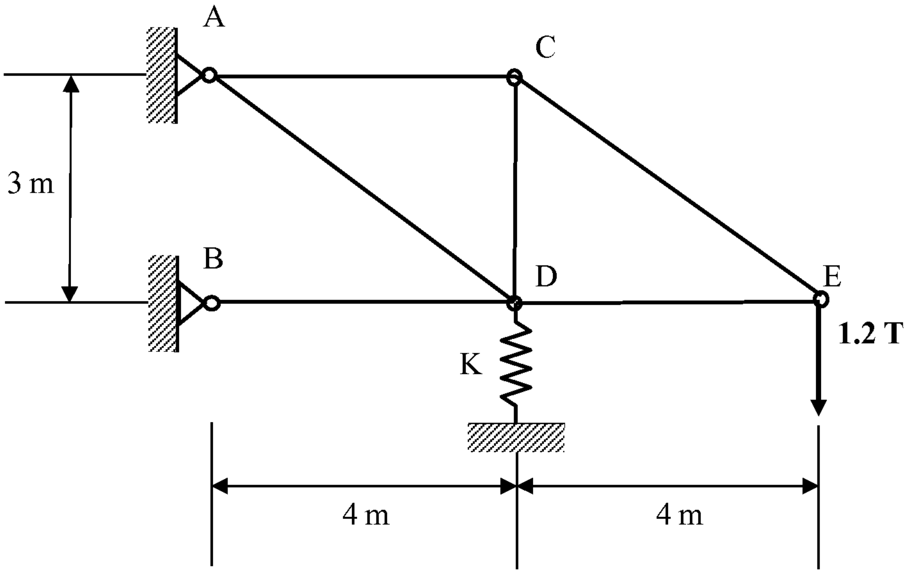
Nota: Para aprobar será necesario alcanzar en cada problema un mínimo del 30% de la puntuación asignada.

PROBLEMA 1.- (4 Puntos)

Calcular la fuerza que actúa sobre el resorte y el descenso del nudo D de la estructura de la figura.

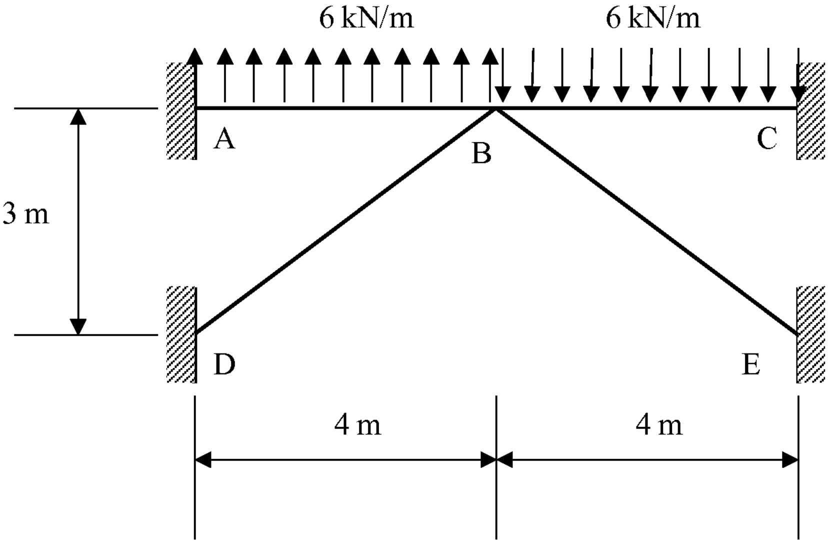
Datos: Rigidez del resorte K=3840.- kg/cm. Para todas las barras: E=$2x10^6$ kg/cm^2 ; A=3.2 cm^2.



PROBLEMA 2.- (6 Puntos)

Calcular por métodos matriciales los movimientos del nudo B de la estructura de la figura.

Datos: Para todas las barras: EI=10^2 kN m^2 ; EA=10^5 kN.



NOTA: durante el examen, únicamente se podrá utilizar CALCULADORA DE CUALQUIER TIPO (solamente para realizar cálculos matemáticos como por ejemplo operaciones con matrices, estando totalmente prohibido el uso de programas de cálculo de estructuras) y material de dibujo.

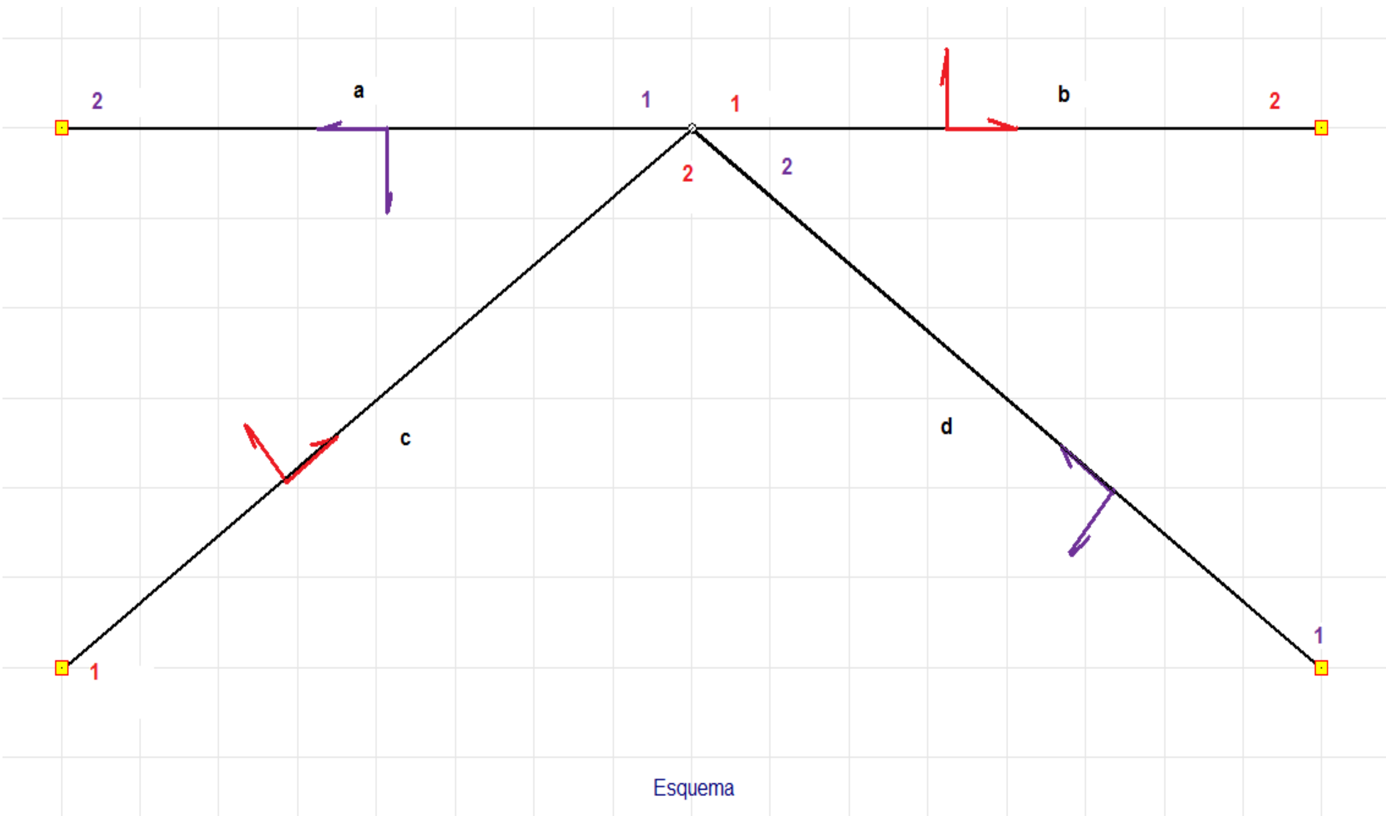
JUNIO 2012 1ª – TEORÍA DE ESTRUCTURAS – INGENIERÍA MECÁNICA – UNED.

Dado que todas las barras de la estructura tienen dos nudos rígidos, las matrices de rigidez de cada barra a considerar son del tipo siguiente.

- Barra con **Dos Nudos Rígidos**, y rigidez de barra $K_{Barra} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$

$$K_{Barra} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{-E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{-12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ \frac{-E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

- Esquema de la estructura, para los coeficientes de barra implicados:



- Matriz de Rigidez de Cada Barra:

Necesitamos los coeficientes siguientes $K_{11}^{a}, K_{11}^{b}, K_{22}^{c}$ y K_{22}^{d} de cada una de las barras implicadas en el movimiento del nudo B. Iremos obteniendo las matrices de cada barra y transformándolas a los E.G.

Barras a y b en ejes de barra y generales

$$\textbf{Barra a } k_{11}=\begin{pmatrix} 25000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{4} & \frac{75}{2} \\ 0 & \frac{75}{2} & 100 \end{pmatrix},\ (\alpha=180^{o}) \Rightarrow \textbf{En ejes generales tendremos que:}$$

$$k_{11}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 25000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{4} & \frac{75}{2} \\ 0 & \frac{75}{2} & 100 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 25000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{4} & -\frac{75}{2} \\ 0 & -\frac{75}{2} & 100 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Barra b } (\alpha=0{,}00^{o}) \Rightarrow k_{11}=\begin{pmatrix} 25000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{4} & \frac{75}{2} \\ 0 & \frac{75}{2} & 100 \end{pmatrix}$$

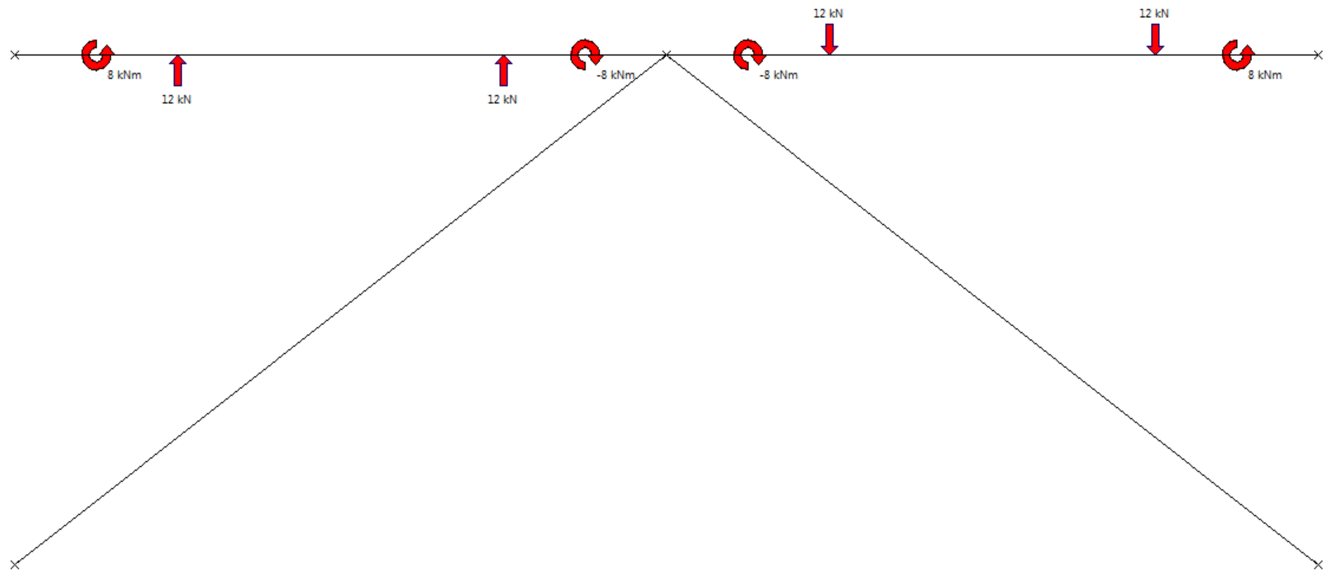
$$\textbf{Barra c en ejes Generales } (\alpha=36{,}87^{o}) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{10^5}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot10^2}{5^3} & \frac{-6\cdot10^2}{5^2} \\ 0 & \frac{-6\cdot10^2}{5^2} & \frac{4\cdot10^2}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k_{22}=\begin{pmatrix} \frac{1600432}{125} & \frac{1199424}{125} & \frac{72}{5} \\ \frac{1199424}{125} & \frac{900768}{125} & -\frac{96}{5} \\ \frac{72}{5} & -\frac{96}{5} & 80 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Barra d en ejes Generales } (\alpha=143{,}13^{o}) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{10^5}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot10^2}{5^3} & \frac{-6\cdot10^2}{5^2} \\ 0 & \frac{-6\cdot10^2}{5^2} & \frac{4\cdot10^2}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k_{22}=\begin{pmatrix} \frac{1600432}{125} & -\frac{1199424}{125} & \frac{72}{5} \\ -\frac{1199424}{125} & \frac{900768}{125} & \frac{96}{5} \\ \frac{72}{5} & \frac{96}{5} & 80 \end{pmatrix}$$

- Matriz de Rigidez de la Estructura:

$$\begin{pmatrix} 25000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{4} & -\frac{75}{2} \\ 0 & -\frac{75}{2} & 100 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 25000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{4} & \frac{75}{2} \\ 0 & \frac{75}{2} & 100 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1600432}{125} & \frac{1199424}{125} & \frac{72}{5} \\ \frac{1199424}{125} & \frac{900768}{125} & -\frac{96}{5} \\ \frac{72}{5} & -\frac{96}{5} & 80 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1600432}{125} & -\frac{1199424}{125} & \frac{72}{5} \\ -\frac{1199424}{125} & \frac{900768}{125} & \frac{96}{5} \\ \frac{72}{5} & \frac{96}{5} & 80 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9450864}{125} & 0 & \frac{144}{5} \\ 0 & \frac{3612447}{250} & 0 \\ \frac{144}{5} & 0 & 360 \end{pmatrix}$$

- Efecto de las Fuerzas Exteriores – Momentos Empotramiento, Axiles y Cortantes Isostáticos:



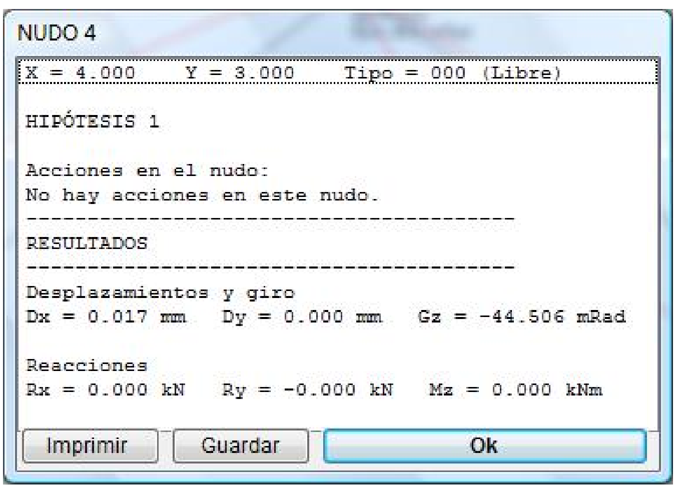
- Sistema a Resolver:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9450864}{125} & 0 & \frac{144}{5}\\ 0 & \frac{3612447}{250} & 0\\ \frac{144}{5} & 0 & 360\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_B\\V_B\\\theta_B\end{pmatrix}\Rightarrow U_B=\frac{10}{590661}=0{,}01692\text{ mm};\ V_B=0,\ \theta_B=-\frac{43754}{984435}=-44{,}446\text{ mRad}.$$

Los movimientos del Nudo B solicitados son los siguientes:

$$\delta_H^B = 0{,}01692\text{ mm}, \delta_V^B = 0{,}00\text{ mm y } \theta_B = -44{,}446\text{ mRad}$$

Resultados ordenador:



```
NUDO 4
X = 4.000     Y = 3.000     Tipo = 000 (Libre)

HIPÓTESIS 1

Acciones en el nudo:
No hay acciones en este nudo.
----------------------------------------
RESULTADOS
----------------------------------------
Desplazamientos y giro
Dx = 0.017 mm    Dy = 0.000 mm    Gz = -44.506 mRad

Reacciones
Rx = 0.000 kN    Ry = -0.000 kN    Mz = 0.000 kNm

Imprimir   Guardar   Ok
```

- Diagramas – Esfuerzos en las Barras

$$\begin{pmatrix} N \\ V \\ M \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}}_{En\ Ejes\ de\ Barra} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_H \\ \delta_V \\ \theta \end{pmatrix}}_{Esfuerzos\ en\ Ejes\ de\ Barra.}$$

$$\text{Barra c} \begin{pmatrix} \text{Axil} \\ \text{Cortante} \\ \text{Momento} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10^5}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\cdot 10^2}{5^3} & \frac{-6\cdot 10^2}{5^2} \\ 0 & \frac{-6\cdot 10^2}{5^2} & \frac{4\cdot 10^2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{10}{590661} \\ 0 \\ \frac{-43754}{984435} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{160000}{590661} \\ \frac{70000}{65629} \\ -\frac{700016}{196887} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 \\ 1,07 \\ -3,55 \end{pmatrix}$$

Diagrama de Momentos:

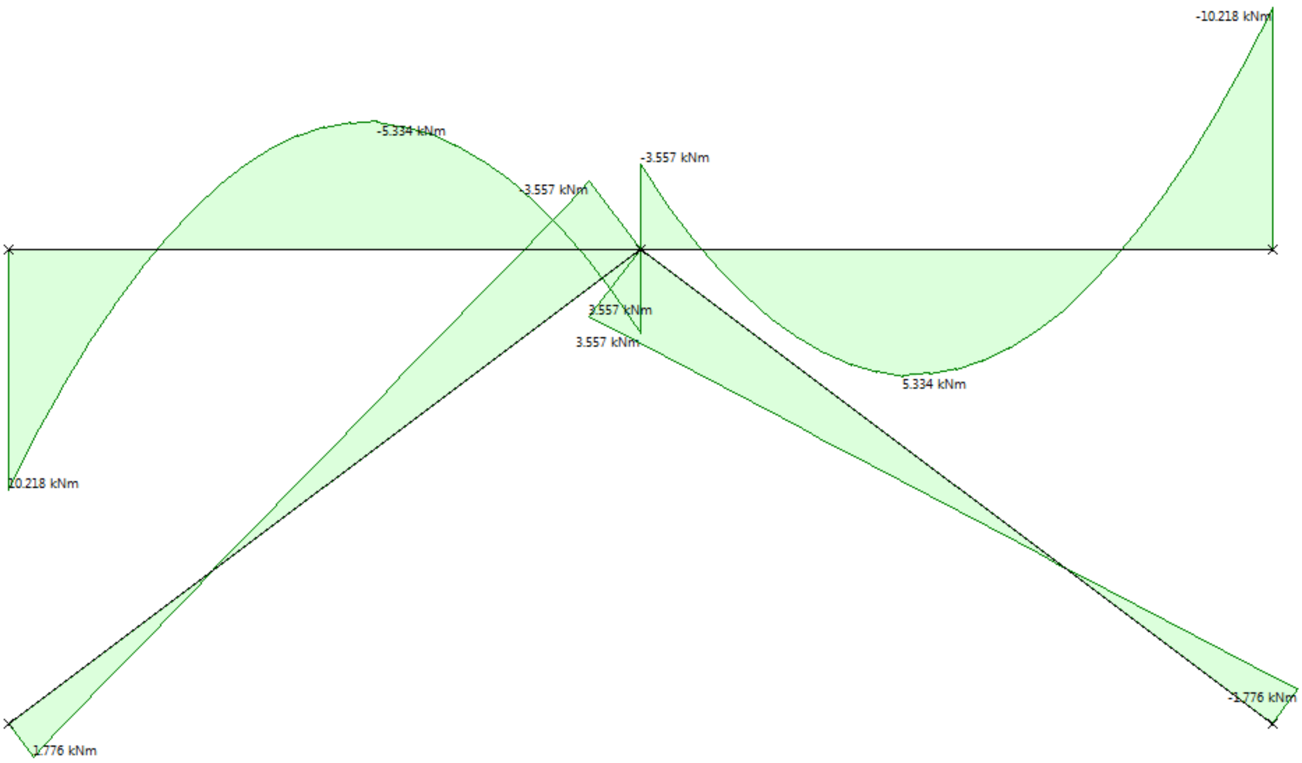


Diagrama de Cortantes:

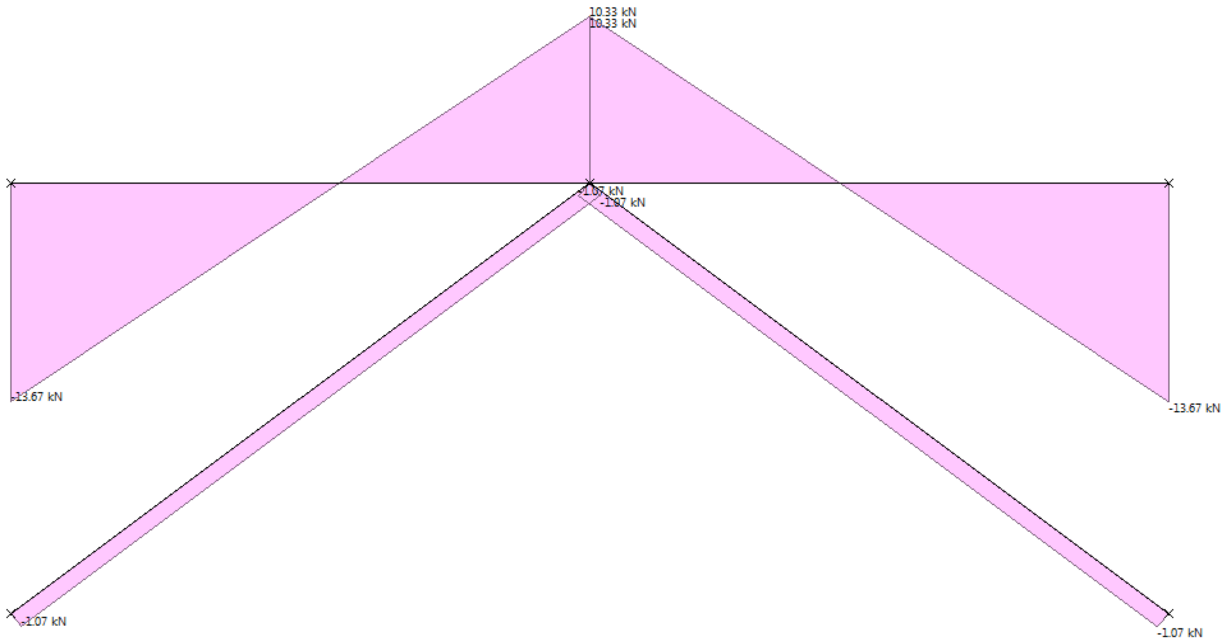
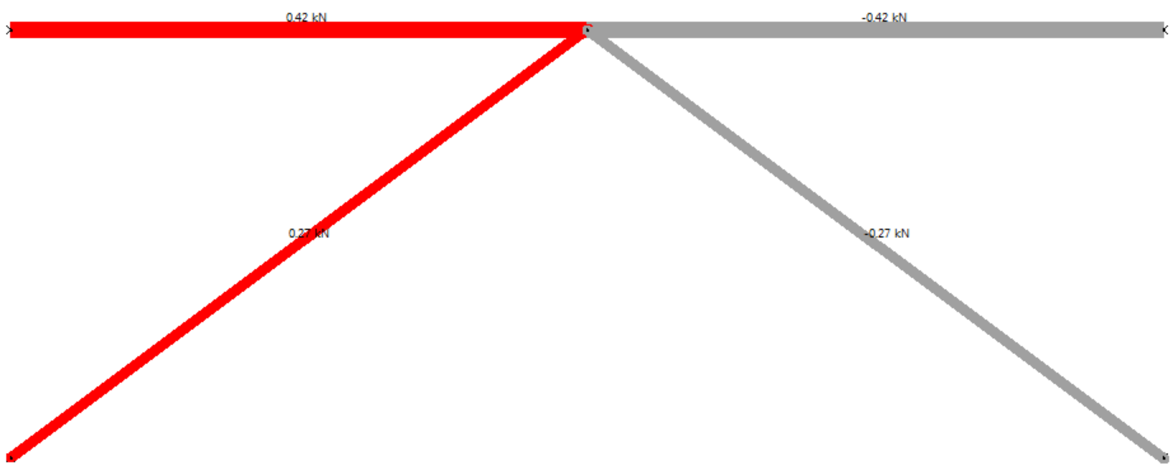


Diagrama de Axiles o Normales:

(Rojo -> Tracción ; Gris -> Compresión ; Verde -> Variable)



Más Información en el 91-576-00-15.